Méthodes mathématiques pour la physique

examen du 10/05/2010 - correction

Exercice 1.

1).
$$\begin{cases} a_+ = \dfrac{x_1 - ix_2 + ip_1 + p_2}{2} \\[2ex] a_- = \dfrac{x_1 + ix_2 + ip_1 - p_2}{2} \\[2ex] a_+^\dagger = \dfrac{x_1 + ix_2 - ip_1 + p_2}{2} \\[2ex] a_-^\dagger = \dfrac{x_1 - ix_2 - ip_1 - p_2}{2} \end{cases}$$

Nous avons par exemple

$$4[a_+, a_-] = [x_1 - ix_2 + ip_1 + p_2,\; x_1 + ix_2 + ip_1 - p_2] =$$
$$= i\underbrace{[x_1,p_1]}_{=i} + i\underbrace{[x_2,p_2]}_{=i} + i\underbrace{[p_1,x_1]}_{=-i} + i\underbrace{[p_2,x_2]}_{=-i} = 0$$

$$4[a_+^\dagger, a_-^\dagger] = [x_1 + ix_2 - ip_1 + p_2,\; x_1 - ix_2 - ip_1 - p_2] =$$
$$= -i\underbrace{[x_1,p_1]}_{=i} - i\underbrace{[x_2,p_2]}_{=i} - i\underbrace{[p_1,x_1]}_{=-i} - i\underbrace{[p_2,x_2]}_{=-i} = 0$$

$$4[a_+^\dagger, a_-] = [x_1 + ix_2 - ip_1 + p_2,\; x_1 + ix_2 + ip_1 - p_2] =$$
$$= i\underbrace{[x_1,p_1]}_{=i} - i\underbrace{[x_2,p_2]}_{=i} - i\underbrace{[p_1,x_1]}_{=-i} + i\underbrace{[p_2,x_2]}_{=-i} = 0$$

$$4[a_-^\dagger, a_+] = [x_1 - ix_2 - ip_1 - p_2,\; x_1 - ix_2 + ip_1 + p_2] =$$
$$= i\underbrace{[x_1,p_1]}_{=i} - i\underbrace{[x_2,p_2]}_{=i} - i\underbrace{[p_1,x_1]}_{=-i} + i\underbrace{[p_2,x_2]}_{=-i} = 0$$

$$4[a_+^\dagger, a_+] = [x_1 + ix_2 - ip_1 + p_2,\; x_1 - ix_2 + ip_1 + p_2] =$$
$$= i\underbrace{[x_1,p_1]}_{=i} + i\underbrace{[x_2,p_2]}_{=i} - i\underbrace{[p_1,x_1]}_{=-i} - i\underbrace{[p_2,x_2]}_{=-i} = -4$$

$$4[a_-^\dagger, a_-] = -[x_1 + ix_2 + ip_1 - p_2,\; x_1 - ix_2 - ip_1 - p_2] =$$
$$= i\underbrace{[x_1,p_1]}_{=i} + i\underbrace{[x_2,p_2]}_{=i} - i\underbrace{[p_1,x_1]}_{=-i} - i\underbrace{[p_2,x_2]}_{=-i} = -4$$

2). $$4(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-) = (x_1 + ix_2 - ip_1 + p_2)(x_1 - ix_2 + ip_1 + p_2) + (x_1 - ix_2 - ip_1 - p_2)(x_1 + ix_2 + ip_1 - p_2) =$$

$$= \underbrace{(x_1+ix_2)(x_1-ix_2)}_{=x_1^2+x_2^2} + (x_1+ix_2)(ip_1+p_2) + (-ip_1+p_2)(x_1-ix_2)$$
$$+ \underbrace{(-ip_1+p_2)(ip_1+p_2)}_{=p_1^2+p_2^2} + \underbrace{(x_1-ix_2)(x_1+ix_2)}_{=x_1^2+x_2^2} + (x_1-ix_2)(ip_1-p_2)$$
$$+ (-ip_1-p_2)(x_1+ix_2) + \underbrace{(-ip_1-p_2)(ip_1-p_2)}_{=p_1^2+p_2^2} =$$

2

$$= 2(x_1^2+x_2^2+p_1^2+p_2^2) + [x_1+ix_2, ip_1+p_2] + [x_1-ix_2, ip_1-p_2] =$$

$$= 2(x_1^2+x_2^2+p_1^2+p_2^2) + i\underbrace{[x_1,p_1]}_{=i} + i\underbrace{[x_2,p_2]}_{=i} + i\underbrace{[x_1,p_1]}_{=i} + i\underbrace{[x_2,p_2]}_{=i} =$$

$$= 2(x_1^2+x_2^2+p_1^2+p_2^2) - 4,$$

d'où

(1) $$\hat{H} = x_1^2+x_2^2+p_1^2+p_2^2 = 4(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + 1)/2 = 2(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + 1)$$

3). On note $|k,\ell\rangle = (a_+^\dagger)^k (a_-^\dagger)^\ell |vac\rangle$.

- Grâce à (1), on a

$$\hat{H}|k,\ell\rangle = \hat{H}(a_+^\dagger)^k (a_-^\dagger)^\ell |vac\rangle =$$
$$= \{[\hat{H}, (a_+^\dagger)^k (a_-^\dagger)^\ell] + (a_+^\dagger)^k (a_-^\dagger)^\ell \underbrace{\hat{H}|vac\rangle}_{=2|vac\rangle} =$$

(2) $$= [\hat{H}, (a_+^\dagger)^k (a_-^\dagger)^\ell]|vac\rangle + 2|k,\ell\rangle$$

- D'autre part :

$$[\hat{H}, a_+^\dagger] = 2[a_+^\dagger a_+ + \cancel{a_-^\dagger a_-} + \cancel{1}, a_+^\dagger] = 2[a_+^\dagger a_+, a_+^\dagger] =$$
$$= 2\underbrace{[a_+^\dagger, a_+^\dagger]}_{=0} a_+ + 2a_+^\dagger \underbrace{[a_+, a_+^\dagger]}_{=1} = 2a_+^\dagger$$

$$[\hat{H}, a_-^\dagger] = 2[\cancel{a_+^\dagger a_+} + a_-^\dagger a_- + \cancel{1}, a_-^\dagger] = 2[a_-^\dagger a_-, a_-^\dagger] =$$
$$= 2\underbrace{[a_-^\dagger, a_-^\dagger]}_{=0} a_- + 2a_-^\dagger \underbrace{[a_-, a_-^\dagger]}_{=1} = 2a_-^\dagger.$$

et donc

(3) $$[\hat{H}, (a_+^\dagger)^k (a_-^\dagger)^\ell] = \underbrace{(2k}_{\text{nombre d'apparences de } a_+^\dagger} + \underbrace{2\ell)}_{\text{nombre d'apparences de } a_-^\dagger} (a_+^\dagger)^k (a_-^\dagger)^\ell$$

3

- En utilisant (3) dans (2), on arrive à

$$\hat{H}|k,\ell\rangle = (2k+2\ell)\underbrace{(a_+^\dagger)^k (a_-^\dagger)^\ell |vac\rangle}_{=|k,\ell\rangle} + 2|k,\ell\rangle =$$

$$= 2(k+\ell+1)|k,\ell\rangle$$

Donc $|k,\ell\rangle$ est un vecteur propre de $\hat{H}$, avec la valeur propre égale à $2(k+\ell+1)$.

4). $$[\hat{Q}, \hat{H}] = 2[a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-, a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + \cancel{1}] =$$

$$= 2\underbrace{[a_+^\dagger a_+, a_+^\dagger a_+]}_{=0} - 2\underbrace{[a_-^\dagger a_-, a_-^\dagger a_-]}_{=0} = 0$$

5). De la même façon que dans 3), on obtient

$$\hat{Q}|k,\ell\rangle = [\hat{Q}, (a_+^\dagger)^k (a_-^\dagger)^\ell]|vac\rangle + (a_+^\dagger)^k (a_-^\dagger)^\ell \hat{Q}|vac\rangle$$

D'autre part

- $\hat{Q}|vac\rangle = 0$
- $[\hat{Q}, a_+^\dagger] = [a_+^\dagger a_+ - \cancel{a_-^\dagger a_-}, a_+^\dagger] = a_+^\dagger$
- $[\hat{Q}, a_-^\dagger] = [\cancel{a_+^\dagger a_+} - a_-^\dagger a_-, a_-^\dagger] = -a_-^\dagger$

et donc $[\hat{Q}, (a_+^\dagger)^k (a_-^\dagger)^\ell] = (2k-2\ell)(a_+^\dagger)^k (a_-^\dagger)^\ell$, d'où

$$\hat{Q}|k,\ell\rangle = (2k-2\ell)(a_+^\dagger)^k (a_-^\dagger)^\ell |vac\rangle + (a_+^\dagger)^k (a_-^\dagger)^\ell \cdot 0 =$$

$$= 2(k-\ell)|k,\ell\rangle$$

Alors $|k,\ell\rangle$ est un vecteur propre de $\hat{Q}$ avec la valeur propre correspondante égale à $2(k-\ell)$. On voit donc que chaque opérateur $a_+^\dagger$ crée une "particule" d'énergie 2 et de "charge" 2, tandis que chaque $a_-^\dagger$ crée une "particule" d'énergie 2 et de "charge" (-2).

Exercice 2

1). Nous avons l'équation

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - ab\,y = 0$$

- Lorsque $x \to 0$: supposons que

$$y = x^{\alpha} + o(x^{\alpha}),\quad y' = \alpha x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}),\quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + o(x^{\alpha-2})$$

Dans cette hypothèse :

$$(x-x^2)\left(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + o(x^{\alpha-2})\right) + [c-(a+b+1)x](\alpha x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}))$$
$$+ ab\,(x^{\alpha} + o(x^{\alpha})) = 0$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})}_{x(1-x)y''} + \underbrace{\alpha c\, x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})}_{[c-(a+b+1)x]y'} + \underbrace{o(x^{\alpha-1})}_{-ab\,y} = 0$$

$\Downarrow$

$$[\alpha^2 + (c-1)\alpha]\,x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}) = 0$$

$\Downarrow$

$$\alpha^2 + (c-1)\alpha + \frac{o(x^{\alpha-1})}{x^{\alpha-1}} = 0$$

Dans la limite $x \to 0$ on obtient donc l'équation $\alpha^2 + (c-1)\alpha = 0$ qui a 2 solutions : $\alpha = 0$ et $\alpha = 1-c$.

Ceci permet de supposer qu'il existe des solutions vérifiant

$$y_I(x) = 1 + o(1)$$

$$y_{II}(x) = x^{1-c}(1 + o(1))$$

lorsque $x \to 0$.

- Pour $x \to 1$, on suppose que

$$y = (x-1)^{\alpha} + o((x-1)^{\alpha})$$

$$y' = \alpha(x-1)^{\alpha-1} + o((x-1)^{\alpha-1})$$

$$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + o((x-1)^{\alpha-2})$$

En substituant dans l'équation, on obtient

$$-[1+(x-1)](x-1)\left(\alpha(\alpha-1)(x-1)^{\alpha-2} + o((x-1)^{\alpha-2})\right)$$
$$+ [c-(a+b+1)(1+(x-1))](\alpha(x-1)^{\alpha-1} + o((x-1)^{\alpha-1}))$$
$$+ ab\,((x-1)^{\alpha} + o((x-1)^{\alpha})) = 0,$$

d'où :

$$\underbrace{-\alpha(\alpha-1)(x-1)^{\alpha-1}+o((x-1)^{\alpha-1})}_{x(1-x)y''}+\underbrace{(c-a-b-1)\alpha(x-1)^{\alpha-1}+o((x-1)^{\alpha-1})}_{[c-(a+b+1)x]\,y'}+$$

$$+\underbrace{o((x-1)^{\alpha-1})}_{-ab\,y}=0$$

S

$\Leftrightarrow$

$$\alpha(c-a-b-\cancel{1}-\alpha+\cancel{1})(x-1)^{\alpha-1}+o((x-1)^{\alpha-1})=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha(c-a-b-\alpha)=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha=0 \quad \text{ou} \quad \alpha=c-a-b$$

Donc on peut supposer que les comportements asymptotiques possibles sont

$$y_{III}=1+o(1)$$

$$y_{IV}=(x-1)^{c-a-b}(1+o(1))$$

lorsque $x\to 1$.

- Enfin pour $x\to\infty$, on suppose que

$$y=x^{\alpha}+o(x^{\alpha})$$

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}+o(x^{\alpha-1})$$

$$y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+o(x^{\alpha-2})$$

et alors

$$\underbrace{-x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+o(x^{\alpha-2})\right)}_{x(1-x)y''}$$

$$\underbrace{-x\left(a+b+1-\frac{c}{x}\right)\left(\alpha x^{\alpha-1}+o(x^{\alpha-1})\right)}_{[c-(a+b+1)x]y'}-\underbrace{ab\left(x^{\alpha}+o(x^{\alpha})\right)}_{ab\,y}=0$$

d'où on trouve

$$\left[-\alpha(\alpha-1)-\alpha(a+b+1)-ab\right]x^{\alpha}+o(x^{\alpha})=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha^2-\cancel{\alpha}+\alpha(a+b+\cancel{1})+ab=0$$

6

$\Leftrightarrow$

$$\alpha^2+(a+b)\alpha+ab=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha=-a \quad \text{ou} \quad \alpha=-b$$

et les comportements possibles sont

$$y_{V}=x^{-a}(1+o(1))$$

$$y_{VI}=x^{-b}(1+o(1))$$

lorsque $x\to\infty$.

2). Si $\quad y=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k$, alors

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k k x^{k-1}, \qquad y''=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k k(k-1)x^{k-2}$$

En substituant dans l'équation, on trouve

$$x(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k k(k-1)x^{k-2}+\left[c-(a+b+1)x\right]\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k k x^{k-1}$$

$$+ab\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k k(k-1)(x^{k-1}-x^k)+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k k(cx^{k-1}-(a+b+1)x^k)$$

$$-ab\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k=0$$

$\Leftrightarrow$

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\alpha_k k(c+k-1)x^{k-1}-\left[\alpha_k k(k-1)+\alpha_k k(a+b+1)+ab\alpha_k\right]x^k\right\}$$

$\Leftrightarrow$

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\alpha_k k(c+k-1)x^{k-1}-\alpha_k\left[k^2+k(a+b)+ab\right]x^k\right\}$$

$\Leftrightarrow$

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\alpha_k k(c+k-1)x^{k-1}-\alpha_k(k+a)(k+b)x^k\right\}$$

La première somme on peut réécrire comme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k k(c+k-1)x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k k(c+k-1)x^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} (k+1)(c+k)x^k$$

7

Donc on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\alpha_{k+1}(k+1)(c+k) - \alpha_k(k+a)(k+b)\right] x^k = 0$$

et, comme chaque coefficient dans cette série doit être 0, nous avons la relation de récurrence

(4) $$\alpha_{k+1}(k+1)(c+k) - \alpha_k(k+a)(k+b) = 0$$

3). Nous allons montrer par induction que

(5) $$\alpha_k = \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+k)} \alpha_0$$

- d'abord notons que (5) est vérifiée pour $k=0$
- supposons qu'elle est vérifiée pour $k=n$:

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)} \alpha_0$$

- montrons qu'elle est vrai pour $k=n+1$. Effectivement, en utilisant (4), on peut écrire

$$\alpha_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)} \alpha_n = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)} \cdot \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)} \alpha_0 =$$

$$= \frac{\overbrace{(n+a)\Gamma(n+a)}^{=\Gamma(n+1+a)} \cdot \overbrace{(n+b)\Gamma(n+b)}^{=\Gamma(n+1+b)} \cdot \Gamma(c)}{\underbrace{(n+1)n!}_{=(n+1)!} \cdot \Gamma(a) \cdot \Gamma(b) \cdot \underbrace{(n+c)\Gamma(n+c)}_{=\Gamma(n+1+c)}} \alpha_0 =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1+a)\Gamma(n+1+b)\Gamma(c)}{(n+1)!\,\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(n+1+c)} \alpha_0$$

Donc la formule (5) est démontrée par induction.

4). Notons $f(x) = (1-x)^{-a}$. Alors

$$f'(x) = -a(1-x)^{-a-1}\cdot(-1) = a(1-x)^{-a-1}$$

$$f''(x) = a(-a-1)(1-x)^{-a-2}(-1) = a(a+1)(1-x)^{-a-2}$$

....

$$f^{(n)}(x) = a(a+1)\dots(a+n-1)\,(1-x)^{-a-n}$$

8

et en particulier

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = a, \quad f''(0) = a(a+1),$$

$$f^{(n)}(0) = a(a+1)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

Donc le développement de Taylor de $f(x)$ en $x=0$ est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}\,x^k$$

Utilisons cette formule dans le calcul de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tx)^a}\,dt = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}\,x^k t^k\right)dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}\,x^k\int_0^1 t^{b-1+k}(1-t)^{c-b-1}\,dt$$

On sait que $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt = B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, donc

$$\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tx)^a}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}\,x^k\,\frac{\Gamma(b+k)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+k)} =$$

$$= \frac{\Gamma(c-b)}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\frac{\Gamma(k+a)\Gamma(k+b)}{\Gamma(k+c)}\,x^k$$

$$= \frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\,\frac{\Gamma(k+a)\Gamma(k+b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(k+c)}\right)x^k$$

Donc, effectivement la fonction

coefficient α_k donné par (9) avec $\alpha_0 = 1$

$$_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tx)^a}\,dt$$

vérifie l'équation hypergéométrique de Gauss.